Sciences Po
Option Mathématiques

Epreuve 2010
Corrigé

Partie I. Des arcs d'hyperboles

1. Variations de la fonction f_m

On a un cas très simple : si $m=0$, f_0 est la fonction nulle sur l'intervalle $[0\,;1[$ et g_0 est la fonction prenant la valeur 1 sur l'intervalle $]0\,;1]$. Les fonctions f_0 et g_0 sont constantes.

Supposons désormais que le réel *m* est non nul. Il est ainsi strictement positif.

La fonction f_m est la composée de trois fonctions :

- La fonction $x \mapsto 1-x$ qui est une fonction affine <u>strictement décroissante</u> sur $\mathbb{R}$ (le coefficient de « x » est strictement négatif) et donc sur $[0\,;1[$.
  On a : $0 \le x < 1 \Leftrightarrow -1 < -x \le 0 \Leftrightarrow 0 < 1-x \le 1$. Cette fonction prend donc ses valeurs dans l'intervalle $]0\,;1]$.
- La fonction inverse qui est <u>strictement décroissante</u> sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $]0\,;1]$.
  On a : $0 < x \le 1 \Leftrightarrow 1 \le \frac{1}{x}$. Cette fonction prend donc ses valeurs dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto mx$ qui est une fonction linéaire <u>strictement croissante</u> sur $\mathbb{R}$ et donc sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ puisque le coefficient de « x » est strictement positif.

Comme composée d'une fonction strictement croissante et de deux fonctions strictement décroissantes, la fonction f_m est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1[$.

La fonction g_m est la somme de la fonction constante $x \mapsto 1$ et de la fonction $x \mapsto -\frac{m}{x}$.
Son sens de variation est donc celui de cette deuxième fonction.

La fonction $x \mapsto -\dfrac{m}{x}$ est la composée de deux fonctions :

- La fonction inverse qui est <u>strictement décroissante</u> sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $]0\,;1]$.

  On a : $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \dfrac{1}{x}$. Cette fonction prend donc ses valeurs dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
- La fonction $x \mapsto -mx$ qui est une fonction linéaire <u>strictement décroissante</u> sur $\mathbb{R}$ et donc sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ puisque le coefficient de « x » est strictement négatif.

Comme composée de deux fonctions strictement décroissantes, la fonction g_m est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;1]$.

Finalement :

Si $m = 0$, les fonctions f_0 et g_0 sont constantes. Si $m \neq 0$, les fonctions f_m et g_m sont strictement croissantes.

2. Résolution de l'équation $f_m(x) = 1$.

On a vu précédemment que pour $m = 0$, la fonction f_0 était constante et prenait pour valeur 0. Dans ce cas, l'équation $f_0(x) = 1$ n'admet pas de solution.

Supposons désormais que le réel *m* est non nul. Il vient :

$$f_m(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{m}{1-x} = 1 \Leftrightarrow m = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - m$$

Or, on a : $0 < m \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -m < 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - m < 1$. La valeur de *x* obtenue appartient bien à l'intervalle de définition de la fonction f_m : on a bien affaire à une solution de l'équation.

En définitive :

Si $m = 0$, l'équation $f_m(x) = 1$ n'admet pas de solution. Si $m \neq 0$, l'équation $f_m(x) = 1$ admet une solution : $x = 1 - m$.

Résolution de l'équation $g_m(x) = 0$.

On a vu précédemment que pour $m = 0$, la fonction g_0 était constante et prenait pour valeur 1. Dans ce cas, l'équation $g_0(x) = 1$ n'admet pas de solution.

Supposons désormais que le réel m est non nul. Il vient :

$$g_m(x)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{m}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{m}{x}=1 \Leftrightarrow x=m$$

Or, on a : $0<m\leq 1$. La valeur de x obtenue appartient bien à l'intervalle de définition de la fonction f_m : on a bien affaire à une solution de l'équation.

En définitive :

Si $m=0$, l'équation $g_m(x)=0$ n'admet pas de solution.
Si $m\neq 0$, l'équation $g_m(x)=0$ admet une solution : $x=m$.

3. Résolution de l'équation $f_m(x)=g_m(x)$.

En guise de préambule, notons que les fonctions f_m et g_m sont simultanément définies sur l'intervalle $]0\,;1[$. On cherche donc des solutions éventuelles dans cet intervalle.

Si $m=0$, les fonctions f_0 et g_0 sont constantes et prennent respectivement pour valeurs 0 et 1. L'équation $f_0(x)=g_0(x)$ n'admet donc pas de solution.

Supposons désormais que le réel m est non nul.
Il vient :

$$\begin{aligned} & f_m(x)=g_m(x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{m}{1-x}=1-\frac{m}{x} \\ \Leftrightarrow\ & mx=x(1-x)-m(1-x) \\ \Leftrightarrow\ & \cancel{mx}=x-x^2-m+\cancel{mx} \\ \Leftrightarrow\ & x^2-x+m=0 \end{aligned}$$

Nous obtenons une équation du second degré dont le discriminant Δ vaut : $\Delta=1-4m$.

Il en résulte la discussion suivante :

- Si $m\in\left]0\,;\frac{1}{4}\right[$, on a : $\Delta>0$. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2-x+m=0$ admet deux solutions : $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1-4m}}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$.
  Appartiennent-elles à l'intervalle $]0\,;1[$?
  On a : $0<m<\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 0<1-4m<1 \Leftrightarrow 0<\sqrt{1-4m}<1$.

On en déduit alors : $0 < \frac{1-\sqrt{1-4m}}{2} < \frac{1}{2}$. Donc $x_1 \in \left]0\,;1\right[$.

Et : $\frac{1}{2} < \frac{1+\sqrt{1-4m}}{2} < 1$. Donc : $x_2 \in \left]0\,;1\right[$.

Les deux solutions obtenues appartiennent bien à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.

- Si $m = \frac{1}{4}$, l'équation se récrit : $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$. Soit : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. L'équation admet pour unique solution $\frac{1}{2}$ qui appartient bien à l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.
- Si $m \in \left]\frac{1}{4}\,;1\right[$, on a : $\Delta < 0$ et l'équation $f_m(x) = g_m(x)$ n'admet pas de solution.

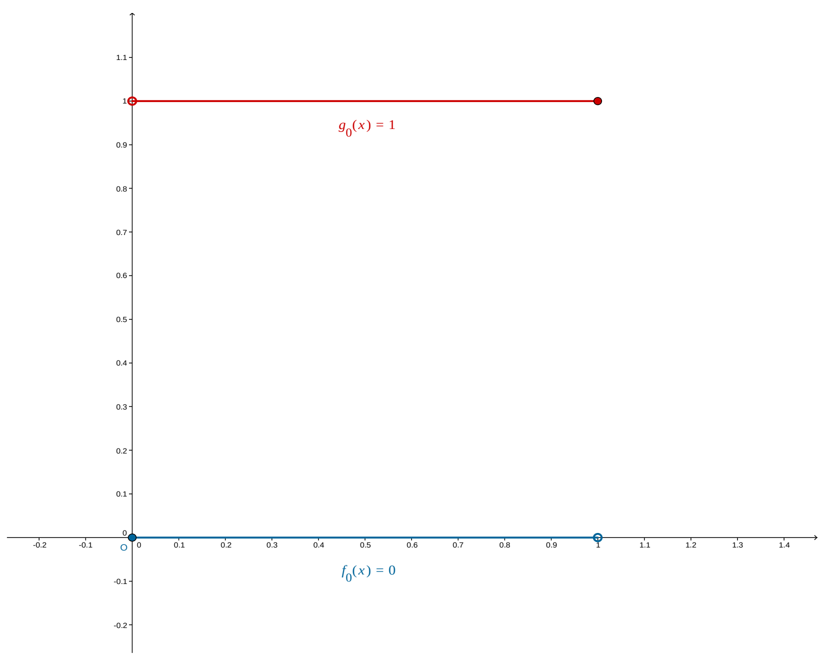
En définitive :

> L'équation $f_m(x) = g_m(x)$ admet des solutions pour tout réel m de l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{4}\right]$.

Remarque : on observera que pour toute solution α, lorsqu'il en existe, de l'équation $f_m(x) = g_m(x)$, on a : $f_m(\alpha) = g_m(\alpha) = \alpha$.

4. Pour des soucis de lisibilité, nous fournissons ci-dessous une représentation graphique pour chacune des valeurs de m retenues.

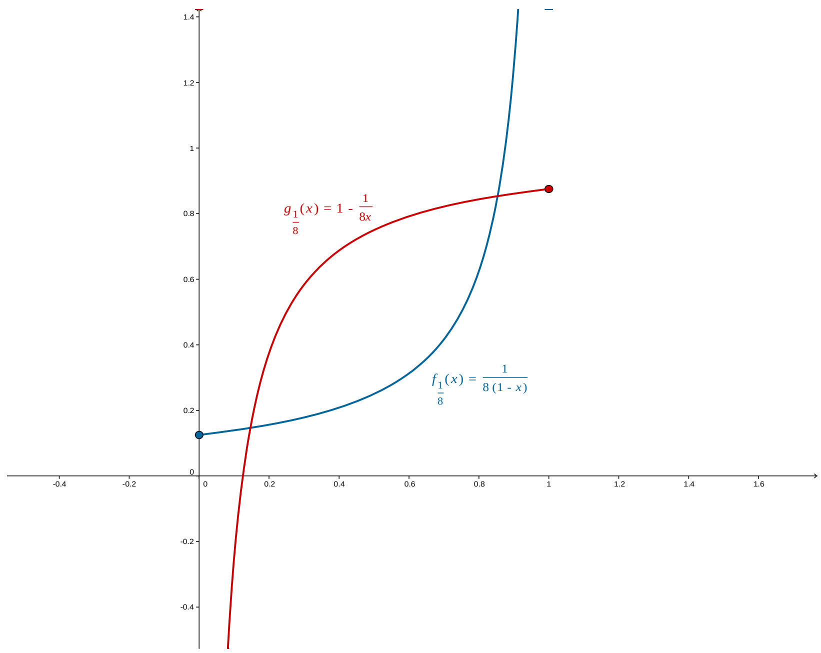
   Le cas $m = 0$, on obtient immédiatement la figure suivante :



Remarque : les courbes sont ici deux segments dont il manque une extrémité. Les deux points manquant sont matérialisés par de petits cercles.

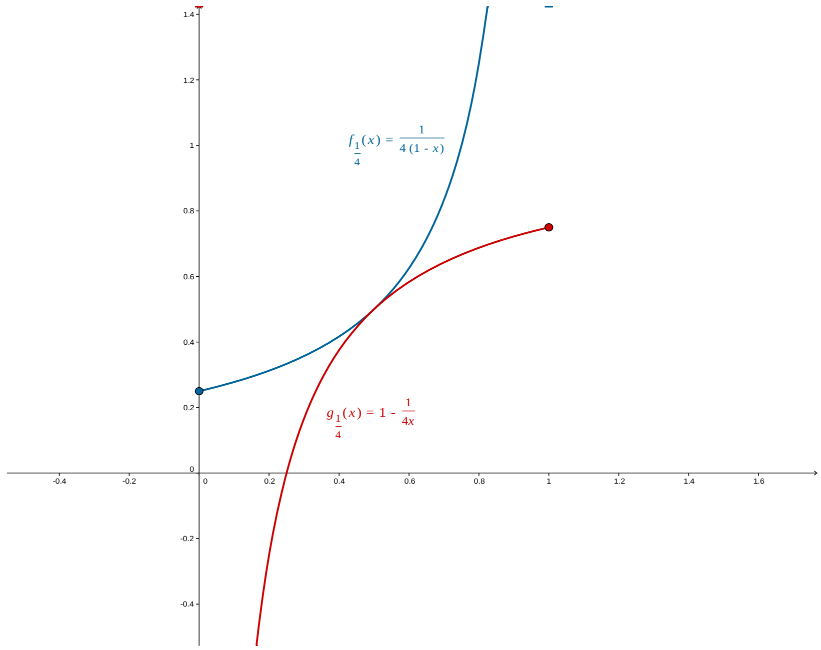
Nous avons vu que à la question précédente que l'équation $f_m(x) = g_m(x)$ admettait deux solutions distinctes pour toute valeur de m dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{4}\right[$.

En choisissant $m = \frac{1}{8}$, on a $f_{\frac{1}{8}}(x) = \frac{1}{8}\frac{1}{1-x}$ et $g_{\frac{1}{8}}(x) = 1 - \frac{1}{8x}$. Obtient alors :



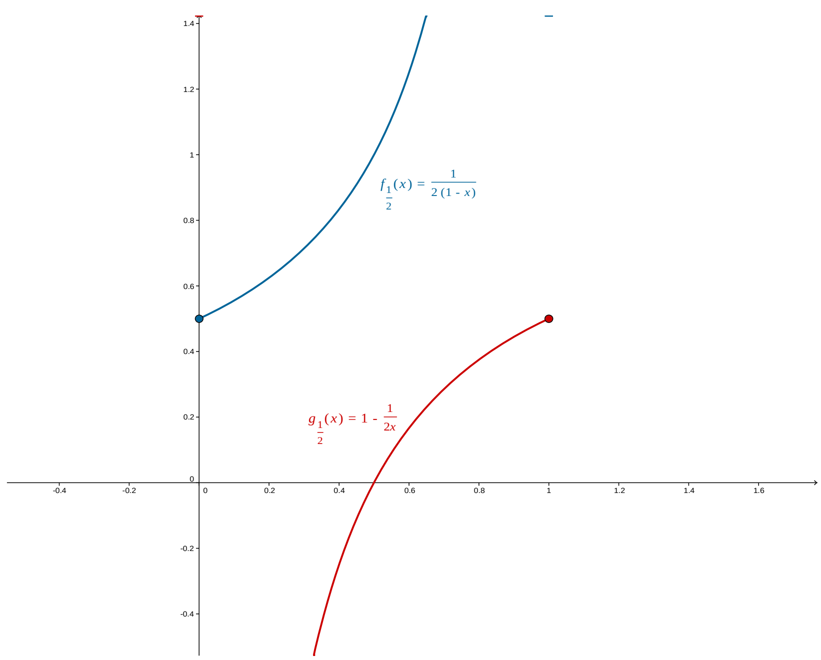
Le cas $m = \frac{1}{4}$ correspond à celui où l'équation $f_m(x) = g_m(x)$ admet une unique solution. Graphiquement parlant, les deux branches d'hyperbole sont tangentes.

Avec $f_{\frac{1}{4}}(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{1-x}$ et $g_{\frac{1}{4}}(x) = 1 - \frac{1}{4x}$, on obtient la figure en haut de la page suivante.



Enfin, pour toute valeur de m strictement supérieure à $\frac{1}{4}$, on a vu à la question précédente que l'équation $f_m(x) = g_m(x)$ n'admettait pas de solution.

En choisissant $m = \frac{1}{2}$, on a $f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x}$ et $g_{\frac{1}{2}}(x) = 1 - \frac{1}{2x}$. Obtient alors :



Remarque : on ne peut s'empêcher d'achever cette partie du corrigé sans attirer l'attention du (de la) lecteur (lectrice) sur la symétrie des courbes représentatives des fonctions f_m et g_m.

En effet, il semble déjà que ces courbes soient, pour toute valeur de *m* (y compris 0), symétriques par rapport au point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

En effet, considérons deux réels *x* et x' tels que *x* appartienne à l'intervalle $[0;1[$ et vérifiant $\frac{x+x'}{2}=\frac{1}{2}$ (on remarque, et c'est essentiel, que x' appartient alors à l'intervalle $]0;1]$). On a :

$$\frac{f_m(x)+g_m(x')}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{m}{1-x}+1-\frac{m}{x'}\right)=\frac{1}{2}+\frac{m}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{x'}\right)=\frac{1}{2}+\frac{m}{2}\frac{x+x'-1}{(1-x)x'}$$

Or, $x+x'=1$. On a donc finalement :

$$\frac{f_m(x)+g_m(x')}{2}=\frac{1}{2}$$

On en déduit immédiatement que les courbes représentatives des fonctions f_m et g_m admettent pour centre de symétrie le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Partie II. Des lignes de niveaux

1. On a facilement pour les quatre rectangles :

$$\boxed{\mathcal{A}(\mathrm{R}_1)=xy\,,\ \mathcal{A}(\mathrm{R}_2)=(1-x)y\,,\ \mathcal{A}(\mathrm{R}_3)=(1-x)(1-y)\ \text{et}\ \mathcal{A}(\mathrm{R}_4)=x(1-y)}$$

2. Pour tous réels *x* et *y* compris (au sens large) entre 0 et 1, les réels $1-x$ et $1-y$ sont également compris entre 0 et 1. Il en va alors de même des quatre produits correspondant aux aires des rectangles R_1, R_2, R_3 et R_4. D'un point de vue graphique, les quatre rectangles considérés sont inclus dans le carré OIDJ d'aire égal à 1. Ainsi, les quatre aires correspondantes, et donc la plus grande d'entre elles, sont inférieures à 1.

   Pour établir l'autre inégalité, nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathcal{A}(x,y)$ est strictement plus petite que $\frac{1}{4}$: $\mathcal{A}(x,y)<\frac{1}{4}$.

   Les quatre aires $\mathcal{A}(\mathrm{R}_1)$, $\mathcal{A}(\mathrm{R}_2)$, $\mathcal{A}(\mathrm{R}_3)$ et $\mathcal{A}(\mathrm{R}_4)$ étant inférieures ou égales à $\mathcal{A}(x,y)$, on aurait alors : $\mathcal{A}(\mathrm{R}_1)+\mathcal{A}(\mathrm{R}_2)+\mathcal{A}(\mathrm{R}_3)+\mathcal{A}(\mathrm{R}_4)<4\times\frac{1}{4}=1$. Ce résultat est en contradiction avec : $\mathcal{A}(\mathrm{R}_1)+\mathcal{A}(\mathrm{R}_2)+\mathcal{A}(\mathrm{R}_3)+\mathcal{A}(\mathrm{R}_4)=1$.

On a donc : $\dfrac{1}{4} \le \mathcal{A}(x, y)$.

En définitive :

$$\boxed{\dfrac{1}{4} \le \mathcal{A}(x, y) \le 1}$$

3. Pour obtenir $\mathcal{A}(y, x)$, il convient de s'intéresser au point $\mathrm{P}(y, x)$.
   Notons alors : $\mathcal{A}(\mathrm{R}_1)(y, x)$, $\mathcal{A}(\mathrm{R}_2)(y, x)$, $\mathcal{A}(\mathrm{R}_3)(y, x)$ et $\mathcal{A}(\mathrm{R}_4)(y, x)$ les aires des rectangles R_1, R_2, R_3 et R_4 associés au point P. Pour obtenir les expressions de ces aires par rapport à celles obtenues à la question 1, il suffit de permuter les lettres « *x* » et « *y* ».

   On obtient ainsi :

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}(\mathrm{R}_1)(y, x) = yx = \mathcal{A}(\mathrm{R}_1)(x, y) \\
\mathcal{A}(\mathrm{R}_2)(y, x) = (1-y)x = \mathcal{A}(\mathrm{R}_4)(x, y) \\
\mathcal{A}(\mathrm{R}_3)(y, x) = (1-y)(1-x) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_3)(x, y) \\
\mathcal{A}(\mathrm{R}_4)(y, x) = y(1-x) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_2)(x, y)
\end{gathered}$$

   Ainsi, on retrouve, à l'ordre près, les quatre aires des rectangles associés au point M.

   On en conclut immédiatement :

$$\boxed{\mathcal{A}(y, x) = \mathcal{A}(x, y)}$$

   Remarque : on peut adopter une approche plus géométrique en notant que, le repère considéré étant orthonormal, le point $\mathrm{P}(y, x)$ est simplement l'image du point $\mathrm{M}(x, y)$ par la symétrie axiale d'axe la droite d'équation $y = x$ (1ère bissectrice) qui n'est rien d'autre que la droite (OD). Une telle symétrie conservant les aires, on en déduit immédiatement que les aires des quatre rectangles associés au point $\mathrm{P}(y, x)$ seront égales aux aires des quatre rectangles associés au point $\mathrm{M}(x, y)$. Dans les deux cas, on obtiendra donc la même aire maximale.

4. Dans l'intervalle $[0\,;1]$, on a immédiatement : $t \ge 1-t \Leftrightarrow 2t \ge 1 \Leftrightarrow t \ge \dfrac{1}{2}$.

   On va ainsi distinguer quatre cas suivant que *x* ou *y* est inférieur ou supérieur à $\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{1^{\text{er}} \text{ cas : } x \le \frac{1}{2} \text{ et } y \le \frac{1}{2}}$

Dans ce cas, on a : $x \le 1-x$ et $y \le 1-y$.
Les quantités considérées étant positives, on a :

$$x \le 1-x \Rightarrow xy \le (1-x)y$$
$$x \le 1-x \Rightarrow x(1-y) \le (1-x)(1-y)$$
$$y \le 1-y \Rightarrow xy \le x(1-y)$$
$$y \le 1-y \Rightarrow (1-x)y \le (1-x)(1-y)$$

D'où : $xy \le (1-x)y \le (1-x)(1-y)$ et $xy \le x(1-y) \le (1-x)(1-y)$.
Soit : $\mathcal{A}(\mathrm{R}_1) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_2) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_3)$ et $\mathcal{A}(\mathrm{R}_1) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_4) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_3)$.
On en conclut : $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_3) = (1-x)(1-y)$.

$\boxed{2^{\text{ème}} \text{ cas : } x \le \frac{1}{2} \text{ et } y \ge \frac{1}{2}}$

Dans ce cas, on a : $x \le 1-x$ et $1-y \le y$.
On a cette fois :

$$x \le 1-x \Rightarrow xy \le (1-x)y$$
$$x \le 1-x \Rightarrow x(1-y) \le (1-x)(1-y)$$
$$1-y \le y \Rightarrow x(1-y) \le xy$$
$$1-y \le y \Rightarrow (1-x)(1-y) \le (1-x)y$$

D'où : $x(1-y) \le xy \le (1-x)y$ et $x(1-y) \le (1-x)(1-y) \le (1-x)y$.
Soit : $\mathcal{A}(\mathrm{R}_4) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_1) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_2)$ et $\mathcal{A}(\mathrm{R}_4) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_3) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_2)$.
On en conclut : $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_2) = (1-x)y$.

$\boxed{3^{\text{ème}} \text{ cas : } x \ge \frac{1}{2} \text{ et } y \le \frac{1}{2}}$

Dans ce cas, on a : $1-x \le x$ et $y \le 1-y$.
On a cette fois :

$$1-x \le x \Rightarrow (1-x)y \le xy$$
$$1-x \le x \Rightarrow (1-x)(1-y) \le x(1-y)$$
$$y \le 1-y \Rightarrow xy \le x(1-y)$$
$$y \le 1-y \Rightarrow (1-x)y \le (1-x)(1-y)$$

D'où : $(1-x)y \le xy \le x(1-y)$ et $(1-x)y \le (1-x)(1-y) \le x(1-y)$.

Soit : $\mathcal{A}(\mathrm{R}_2) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_1) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_4)$ et $\mathcal{A}(\mathrm{R}_2) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_3) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_4)$.
On en conclut : $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_4) = x(1-y)$.

$\boxed{4^{\text{ème}} \text{ cas : } x \ge \frac{1}{2} \text{ et } y \ge \frac{1}{2}}$

Dans ce cas, on a : $1-x \le x$ et $1-y \le y$.
Les quantités considérées étant positives, on a :

$$1-x \le x \Rightarrow (1-x)y \le xy$$
$$1-x \le x \Rightarrow (1-x)(1-y) \le x(1-y)$$
$$1-y \le y \Rightarrow x(1-y) \le xy$$
$$1-y \le y \Rightarrow (1-x)(1-y) \le (1-x)y$$

D'où : $(1-x)(1-y) \le x(1-y) \le xy$ et $(1-x)(1-y) \le (1-x)y \le xy$.
Soit : $\mathcal{A}(\mathrm{R}_3) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_4) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_1)$ et $\mathcal{A}(\mathrm{R}_3) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_2) \le \mathcal{A}(\mathrm{R}_1)$.
On en conclut : $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_1) = xy$.

On a finalement :

Si : $x \le \frac{1}{2}$ et $y \le \frac{1}{2}$ alors : $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_3) = (1-x)(1-y)$.
Si : $x \le \frac{1}{2}$ et $y \ge \frac{1}{2}$ alors : $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_2) = (1-x)y$.
Si : $x \ge \frac{1}{2}$ et $y \le \frac{1}{2}$ alors : $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_4) = x(1-y)$.
Si $x \ge \frac{1}{2}$ et $y \ge \frac{1}{2}$ alors : $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_1) = xy$.

Remarque : pour $x = y = \frac{1}{2}$, on a $\mathcal{A}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_1) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_2) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_3) = \mathcal{A}(\mathrm{R}_4) = \frac{1}{4}$.

5. On a : $m \in \left[\frac{1}{4} ; 1\right]$ et $\mathcal{A}(x, y) = m$

5.1. En utilisant les résultats de la question précédente, il vient :

Si : $x \le \frac{1}{2}$ et $y \le \frac{1}{2}$ alors :

$$\mathcal{A}(x, y) = m \Leftrightarrow (1-x)(1-y) = m \Leftrightarrow y = 1 - \frac{m}{1-x} \Leftrightarrow y = g_m(1-x) = 1 - f_m(x)$$

Si : $x \le \frac{1}{2}$ et $y \ge \frac{1}{2}$ alors :

$$\mathcal{A}(x, y) = m \Leftrightarrow (1-x)y = m \Leftrightarrow y = \frac{m}{1-x} \Leftrightarrow y = f_m(x) = 1 - g_m(1-x)$$

Si : $x \geq \frac{1}{2}$ et $y \leq \frac{1}{2}$ alors :

$$\mathcal{A}(x, y) = m \Leftrightarrow x(1-y) = m \Leftrightarrow 1-y = \frac{m}{x} \Leftrightarrow y = 1-\frac{m}{x} \Leftrightarrow y = g_m(x) = 1 - f_m(1-x)$$

Si $x \geq \frac{1}{2}$ et $y \geq \frac{1}{2}$ alors :

$$\mathcal{A}(x, y) = m \Leftrightarrow xy = m \Leftrightarrow y = \frac{m}{x} \Leftrightarrow y = f_m(1-x) = 1 - g_m(x)$$

En définitive, la ligne de niveau L_m est définie par :

Si : $x \leq \frac{1}{2}$ et $y \leq \frac{1}{2}$ alors : $y = g_m(1-x) = 1 - f_m(x)$

Si : $x \leq \frac{1}{2}$ et $y \geq \frac{1}{2}$ alors : $y = f_m(x) = 1 - g_m(1-x)$

Si : $x \geq \frac{1}{2}$ et $y \leq \frac{1}{2}$ alors : $y = g_m(x) = 1 - f_m(1-x)$

Si $x \geq \frac{1}{2}$ et $y \geq \frac{1}{2}$ alors : $y = f_m(1-x) = 1 - g_m(x)$

5.2. La ligne de niveau $\mathrm{L}_{\frac{1}{4}}$ est réduite au point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ puisque l'on a :

$\mathcal{A}(x, y) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Pour les lignes de niveau $\mathrm{L}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathrm{L}_{\frac{3}{4}}$, on peut s'aider du travail effectué à la question 4 de la première partie.

On peut également procéder comme suit :

- Pour $x \leq \frac{1}{2}$ et $y \geq \frac{1}{2}$, on a : $y = f_m(x) = \frac{m}{1-x}$.

  Comme on doit avoir $y \geq \frac{1}{2}$, il vient $\frac{m}{1-x} \geq \frac{1}{2}$, soit $x \geq 1-2m$. La plus petite valeur de x sera donc la plus grande des deux valeurs : 0 et $1-2m$. Elle est notée : $\max(0\,;1-2m)$.

  Comme on doit avoir $y \leq 1$, il vient $\frac{m}{1-x} \leq 1$, soit $x \leq 1-m$ (cette valeur étant supérieure à $\max(0\,;1-2m)$).

  En définitive, on a : $x \in \left[\max(0\,;1-2m)\,;1-m\right]$.

  Pour $m = \frac{1}{2}$ et $m = \frac{3}{4}$, x variera donc respectivement dans les intervalles : $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et $\left[0\,;\frac{1}{4}\right]$

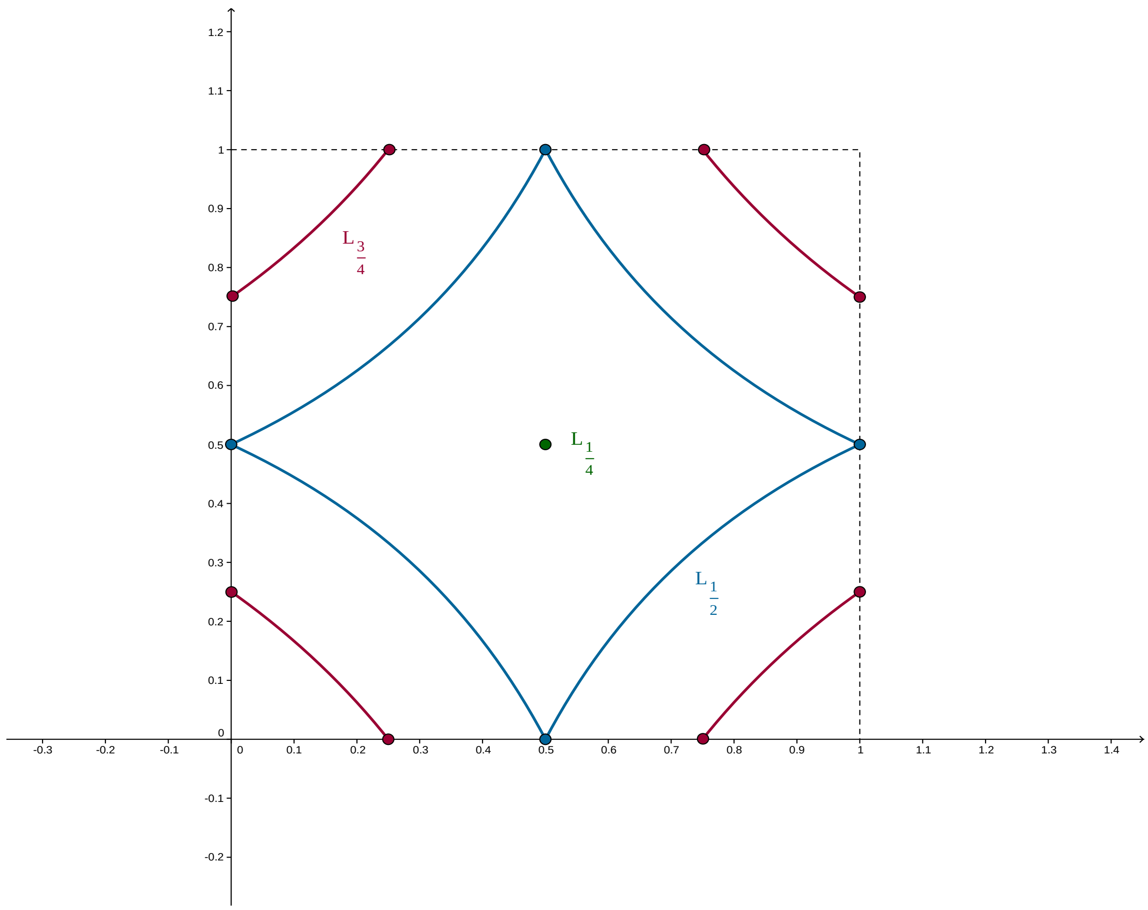
  On obtient ainsi une première branche de L_m.

- Pour $x \leq \frac{1}{2}$ et $y \leq \frac{1}{2}$, on a : $y = 1 - f_m(x)$.

  On va alors obtenir une deuxième branche de L_m en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

- Enfin, on obtiendra les deux autre branches grâce à la symétrie centrale de centre le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Graphiquement, on obtient :



Partie III. Etude d'un ensemble de fonctions affines par morceaux

1. Soulignons, en guise de préambule, que les éventuelles solutions de l'équation $K(t,x)=0$ sont des couples.

   1er cas : supposons $x \leq t$
   On a alors : $K(t,x)=0 \Leftrightarrow x(1-t)=0$.
   Pour $x=0$, comme on veut $x \leq t$, toutes les valeurs de *t* dans l'intervalle $[0\,;1]$ sont possibles.
   Pour $1-t=0$, c'est-à-dire $t=1$, comme on veut $x \leq t$, toutes les valeurs de *x* dans l'intervalle $[0\,;1]$ sont possibles.

   2ème cas : supposons $x > t$
   On a alors $K(t,x)=0 \Leftrightarrow t(1-x)=0$.
   Pour $t=0$, comme on veut $x > t$, toutes les valeurs de *x* dans l'intervalle $]0\,;1]$ sont possibles.
   Pour $1-x=0$, c'est-à-dire $x=1$, comme on veut $x > t$, toutes les valeurs de *t* dans l'intervalle $[0\,;1[$ sont possibles.

   En résumé, on a $K(t,x)=0$ si et seulement si l'une des deux variables est égale à 0 ou 1 :

   $$\boxed{K(t,x)=0 \Leftrightarrow x \in \{0\,;1\} \text{ ou } t \in \{0\,;1\}}$$

   Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on obtient un carré.

2. Soit $t \in [0\,;1]$.

   2.1. Pour *t* fixé, la fonction k_t est, d'après l'expression de *K*, une fonction affine par morceaux de la variable *x* :

   $$k_t : x \mapsto \begin{cases} (1-t)x & \text{si } x \leq t \\ -tx+t & \text{si } x > t \end{cases}$$

   - Sur l'intervalle $[0\,;t]$, son coefficient vaut $1-t \geq 0$ et elle y est donc croissante.
   - Sur l'intervalle $]t\,;1]$, son coefficient vaut $-t \leq 0$ et elle y est donc décroissante.

   On a par ailleurs $k_t(0)=K(0,t)=0$, $k_t(t)=K(t,t)=t(1-t)$ et $k_t(1)=K(1,t)=0$.
   Enfin, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to t\\ x>t}} k_t(x)=\lim\limits_{\substack{x\to t\\ x>t}}\left[t(1-x)\right]=t(1-t)=k_t(t)$. La fonction k_t est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$.

En définitive :

Pour t fixé dans $t \in [0\,;1]$, la fonction k_t est continue sur $[0\,;1]$. De plus, elle est :

- croissante sur l'intervalle $[0\,;t]$ de 0 à $k_t(t) = t(1-t)$.
- décroissante sur l'intervalle $[t\,;1]$ de $k_t(t) = t(1-t)$ à 0.

2.2. D'après l'étude précédente, la fonction k_t admet un maximum sur l'intervalle $[0\,;1]$ en t et la valeur maximale correspondante vaut $k_t(t) = t(1-t)$.

La fonction k_t admet un maximum sur l'intervalle $[0\,;1]$ en $x = t$.

3. D'après la question 2, on peut écrire, pour t quelconque fixé dans $[0\,;1]$:

$$\forall x \in [0\,;1],\, k_t(x) = K(t,x) \leq K(t,t) = k_t(t) = t(1-t)$$

On montre facilement que la fonction $t \mapsto t(1-t)$ admet un maximum sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0\,;1]$ en $t_0 = \frac{1}{2}$. Ce maximum vaut : $k_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

En définitive, on a :

$$\forall t \in [0\,;1],\, \forall x \in [0\,;1],\, K(t,x) \leq K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Le couple $(t_0\,,x_0)$ cherché est donc le couple $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

$$\forall t \in [0\,;1],\, \forall x \in [0\,;1],\, K(t,x) \leq K(t_0\,,x_0) = K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Partie IV. Un noyau pour transformer des fonctions

1. En utilisant la relation de Chasles, on a, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;1]$:

$$\int_0^1 K(t,x)\,dx = \int_0^t K(t,x)\,dx + \int_t^1 K(t,x)\,dx$$

En tenant compte de la définition de la fonction K (cf. Partie III), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 K(t,x)\,dx &= \int_0^t K(t,x)\,dx + \int_t^1 K(t,x)\,dx \\ &= \int_0^t (1-t)\,x\,dx + \int_t^1 t(1-x)\,dx\end{aligned}$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{\forall t \in [0\,;1],\ \int_0^1 K(t,x)\,dx = \int_0^t (1-t)\,x\,dx + \int_t^1 t(1-x)\,dx}$$

On a : $h(t) = \int_0^1 K(t,x)\,dx = \int_0^1 k_t(x)\,dx$.

Or, <u>pour t fixé</u> dans l'intervalle $[0\,;1]$, la fonction k_t est une fonction affine par morceaux :

- De coefficient $1-t \geq 0$ et d'ordonnée à l'origine nulle sur l'intervalle $[0\,;t]$.
- De coefficient $-t \leq 0$ et d'ordonnée à l'origine t sur l'intervalle $]t\,;1]$.

La fonction k_t est continue sur l'intervalle $[0\,;t]$ en tant que fonction affine (elle est même linéaire). Elle est également continue sur l'intervalle $]t\,;1]$ pour la même raison. Par ailleurs, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to t\\ x>t}} k_t(x) = \lim\limits_{\substack{x\to t\\ x>t}} \left[t(1-x)\right] = t(1-t)$ et $k_t(t) = t(1-t)$. On déduit de ce qui précède que la fonction k_t est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$.

On a $k_t(0) = 0$ et k_t croissante sur l'intervalle $[0\,;t]$.
Par ailleurs k_t décroît sur l'intervalle $]t\,;1]$ et $k_t(1) = 0$.
On déduit de ce qui précède que la fonction k_t prend des valeurs positives sur l'intervalle $[0\,;1]$. On peut donc interpréter $h(t)$ comme l'aire du domaine sous la courbe de la fonction k_t entre 0 et 1.
La fonction k_t étant affine par morceaux, ce domaine est un triangle. Ses sommets sont les points de coordonnées : $(0\,;k_t(0)) = (0\,;0)$, $(t\,;k_t(t)) = (t\,;t(1-t))$ et $(1\,;k_t(1)) = (1\,;0)$. On en déduit immédiatement son aire :

$$\frac{1}{2}\times 1 \times t(1-t) = \frac{1}{2}t(1-t)$$

On peut bien sûr retrouver ce résultat par le calcul :

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_0^1 K(t,x)\,dx \\
&= \int_0^t (1-t)\,x\,dx + \int_t^1 t(1-x)\,dx \\
&= (1-t)\int_0^t x\,dx + t\int_t^1 (1-x)\,dx \\
&= (1-t)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^t + t\left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_t^1 \\
&= (1-t)\times\frac{1}{2}\left(t^2-0^2\right) + t\times\left(1-\frac{1}{2}\times 1^2 - t + \frac{1}{2}\times t^2\right) \\
&= \frac{1}{2}t^2(1-t) + \frac{1}{2}t\left(1-2t+t^2\right) \\
&= \frac{1}{2}t^2(1-t) + \frac{1}{2}t(1-t)^2 \\
&= \frac{1}{2}t(1-t)\left[t+(1-t)\right] \\
&= \frac{1}{2}t(1-t)
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall t\in[0\,;1],\ h(t) = \int_0^1 K(t,x)\,dx = \frac{1}{2}t(1-t)}$$

2. On a, par définition :

$$\forall t\in[0\,;1],\ \hat{s}(t) = \int_0^1 k_t(x)\,s(x)\,dx = \int_0^1 k_t(x)\sin(2\pi x)\,dx$$

Comme à la question précédente, la relation de Chasles nous permet d'écrire alors :

$$\begin{aligned}
\hat{s}(t) &= \int_0^1 k_t(x)\sin(2\pi x)\,dx \\
&= \int_0^t k_t(x)\sin(2\pi x)\,dx + \int_t^1 k_t(x)\sin(2\pi x)\,dx \\
&= \int_0^t (1-t)\,x\sin(2\pi x)\,dx + \int_t^1 t(1-x)\sin(2\pi x)\,dx \\
&= (1-t)\int_0^t x\sin(2\pi x)\,dx + t\int_t^1 (1-x)\sin(2\pi x)\,dx
\end{aligned}$$

Considérons la première intégrale : $\int_0^t x\sin(2\pi x)\,dx$.

Considérons, sur l'intervalle $[0\,;t]$, la fonction $u : x \mapsto x$ de dérivée la fonction $u' : x \mapsto 1$, continue sur l'intervalle $[0\,;t]$.

Considérons ensuite sur l'intervalle $[0\,;t]$, la fonction $v' : x \mapsto \sin(2\pi x)$ continue sur cet intervalle et y admettant pour primitive la fonction $v : x \mapsto -\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)$.

Une intégration par partie nous donne alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^t x\sin(2\pi x)\,dx &= \int_0^t u(x)v'(x)\,dx \\
&= \left[u(x)v(x)\right]_0^t - \int_0^t u'(x)v(x)\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{2\pi}x\cos(2\pi x)\right]_0^t - \int_0^t 1\times\left(-\frac{1}{2\pi}x\cos(2\pi x)\right)dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}t\cos(2\pi t) - \left(\cancel{-\frac{1}{2\pi}\times 0\times\cos(2\pi\times 0)}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \cos(2\pi x)\,dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}t\cos(2\pi t) + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_0^t \\
&= -\frac{1}{2\pi}t\cos(2\pi t) + \frac{1}{(2\pi)^2}\left[\sin(2\pi t) - \cancel{\sin(2\pi\times 0)}\right] \\
&= -\frac{1}{2\pi}t\cos(2\pi t) + \frac{1}{(2\pi)^2}\sin(2\pi t)
\end{aligned}$$

Nous procédons de façon similaire avec l'intégrale : $\int_t^1 (1-x)\sin(2\pi x)\,dx$.

On considère, sur l'intervalle $[t\,;1]$, la fonction $u : x \mapsto 1-x$ de dérivée la fonction $u' : x \mapsto -1$, continue sur l'intervalle $[t\,;1]$.

Considérons ensuite sur l'intervalle $[t\,;1]$, la fonction $v' : x \mapsto \sin(2\pi x)$ continue sur cet intervalle et y admettant pour primitive la fonction $v : x \mapsto -\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)$.

Une intégration par partie nous donne alors :

$$\begin{aligned}
\int_t^1 (1-x)\sin(2\pi x)\,dx &= \int_t^1 u(x)v'(x)\,dx \\
&= \left[u(x)v(x)\right]_t^1 - \int_t^1 u'(x)v(x)\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{2\pi}(1-x)\cos(2\pi x)\right]_t^1 - \int_t^1 (-1)\times\left(-\frac{1}{2\pi}x\cos(2\pi x)\right)dx \\
&= \cancel{-\frac{1}{2\pi}(1-1)\cos(2\pi\times 1)} - \left(-\frac{1}{2\pi}\times(1-t)\times\cos(2\pi\times t)\right) - \frac{1}{2\pi}\int_t^1 \cos(2\pi x)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}(1-t)\cos(2\pi t) - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_t^1 \\
&= \frac{1}{2\pi}(1-t)\cos(2\pi t) - \frac{1}{(2\pi)^2}\left[\cancel{\sin(2\pi\times 1)} - \sin(2\pi\times t)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}(1-t)\cos(2\pi t) + \frac{1}{(2\pi)^2}\sin(2\pi t)
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\hat{s}(t) &= (1-t)\int_0^t x\sin(2\pi x)\,dx + t\int_t^1 (1-x)\sin(2\pi x)\,dx \\
&= (1-t)\left[-\frac{1}{2\pi}t\cos(2\pi t) + \frac{1}{(2\pi)^2}\sin(2\pi t)\right] + t\left[\frac{1}{2\pi}(1-t)\cos(2\pi t) + \frac{1}{(2\pi)^2}\sin(2\pi t)\right] \\
&= \cancel{-\frac{t(1-t)}{2\pi}\cos(2\pi t)} + \frac{1-t}{(2\pi)^2}\sin(2\pi t) + \cancel{\frac{t(1-t)}{2\pi}\cos(2\pi t)} + \frac{t}{(2\pi)^2}\sin(2\pi t) \\
&= \frac{1-t+t}{(2\pi)^2}\sin(2\pi t) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\sin(2\pi t) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}s(t)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t\in[0\,;1],\ \hat{s}(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\sin(2\pi t) = \frac{1}{(2\pi)^2}s(t)}$$

3. Soit g un fonction dans E.

On a, par définition :

$$\begin{aligned}\hat{g}(t) &= \int_0^1 k_t(x)\,g(x)\,dx \\ &= \int_0^t k_t(x)\,g(x)\,dx + \int_t^1 k_t(x)\,g(x)\,dx \\ &= (1-t)\int_0^t x\,g(x)\,dx + t\int_t^1 (1-x)\,g(x)\,dx\end{aligned}$$

En particulier :

$$\hat{g}(0) = (1-0)\cancel{\int_0^0 x\,g(x)\,dx} + 0\times\int_0^1 (1-x)\,g(x)\,dx = 0$$

Et :

$$\hat{g}(1) = (1-1)\times\int_0^1 x\,g(x)\,dx + 1\times\cancel{\int_1^1 (1-x)\,g(x)\,dx} = 0$$

On a bien :

$$\boxed{\forall g \in \mathrm{E},\ \hat{g}(0) = \hat{g}(1) = 0}$$

4. Soit f une fonction dans E.
On a, pour tout réel t dans l'intervalle $[0\,;1]$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= (1-t)\int_0^t x\,f(x)\,dx + t\int_t^1 (1-x)\,f(x)\,dx \\ &= (1-t)\int_0^t x\,f(x)\,dx - t\int_1^t (1-x)\,f(x)\,dx\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \int_0^t x\,f(x)\,dx$ est la primitive sur l'intervalle $[0\,;1]$ s'annulant en 0 de la fonction $t \mapsto t\,f(t)$. Ainsi la fonction $t \mapsto (1-t)\int_0^t x\,f(x)\,dx$ est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

La fonction $t \mapsto \int_1^t (1-x)\, f(x)\, dx$ est la primitive sur l'intervalle $[0\,;1]$ s'annulant en 1 de la fonction $t \mapsto (1-t)\, f(t)$. Ainsi, la fonction $t \mapsto t\int_1^t (1-x)\, f(x)\, dx$ est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.
En définitive, la fonction *f* est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$ comme différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout *t* dans $[0\,;1]$ on a :

$$\begin{aligned}\hat{f}\,'(t) &= -1\times\int_0^t x\, f(x)\, dx + (1-t)t\, f(t) - 1\times\int_1^t (1-x)\, f(x)\, dx - t(1-t)\, f(t) \\ &= -\int_0^t x\, f(x)\, dx + \cancel{t(1-t)\, f(t)} - \int_1^t (1-x)\, f(x)\, dx \cancel{-t(1-t)\, f(t)} \\ &= -\int_0^t x\, f(x)\, dx - \int_1^t (1-x)\, f(x)\, dx\end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on établit immédiatement la dérivabilité de $\hat{f}\,'$ et il vient, pour tout réel *t* dans l'intervalle $[0\,;1]$:

$$\hat{f}\,''(t) = -t\, f(t) - (1-t)\, f(t) = \cancel{-t\, f(t)} - f(t) + \cancel{t\, f(t)} = -f(t)$$

Finalement :

Toute fonction f de E est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$ et on a : $\hat{f}\,'' = -f$

Remarque : puisque $\hat{f}$ est deux fois dérivable elle est, en particulier, continue.
Puisqu'elle s'annule en 0 et en 1 (question 3), on en déduit finalement que $\hat{f}$ appartient encore à E.

5. Puisque la fonction g est un élément de E, on a, d'après la question précédente : $g = -\hat{g}\,''$.
L'équation différentielle se récrit donc :

$$f\,'' = g \Leftrightarrow f\,'' = -\hat{g}\,'' \Leftrightarrow f\,'' + \hat{g}\,'' = 0 \Leftrightarrow \left(f + \hat{g}\right)'' = 0$$

On en déduit alors que la fonction $\left(f + \hat{g}\right)'$ est constante sur l'intervalle $[0\,;1]$:

$$\forall t \in [0\,;1], \left(f + \hat{g}\right)'(t) = C$$

où *C* est une constante réelle.

On en déduit alors : $\forall t \in [0\,;1], \left(f + \hat{g}\right)(t) = Ct + k$ où *C* et *k* sont deux constantes réelles.

Finalement :

$$\forall t \in [0\,;1],\ f(t) = -\hat{g}(t) + Ct + k$$

On cherche les solutions appartenant à E. On veut donc : $f(0) = f(1) = 0$. Mais comme g est dans E, on aussi, d'après la question 3 : $\hat{g}(0) = \hat{g}(1) = 0$. On a alors :

- $f(0) = 0 \Leftrightarrow -\hat{g}(0) + C \times 0 + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$.
- Puis : $f(1) = 0 \Leftrightarrow -\hat{g}(1) + C \times 1 = 0 \Leftrightarrow C = 0$.

En définitive, on a : $\forall t \in [0\,;1],\ f(t) = -\hat{g}(t)$, c'est-à-dire : $f = -\hat{g}$.

L'équation différentielle $f'' = g$ admet une unique solution dans E : $f = -\hat{g}$.

Partie V. … et pour construire une suite.

1. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{2(n+1)+1} \\ &= t\left(1 - x_{2(n+1)}\right) \\ &= t\left[1 - (1-t)\,x_{2n+1}\right] \\ &= t\left[1 - (1-t)\,y_n\right] \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = t\left[1 - (1-t)\,y_n\right]$

On a : $y_{n+1} - \beta = \alpha(y_n - \beta) \Leftrightarrow y_{n+1} = \alpha(y_n - \beta) + \beta = \alpha y_n + \beta(1-\alpha)$.
Or, d'après la question précédente, on a :

$$y_{n+1} = t\left[1 - (1-t)\,y_n\right] = -t(1-t)\,y_n + t$$

Par identification, on en déduit : $\alpha = -t(1-t)$ et $\beta(1-\alpha) = t$.
A partir de la deuxième égalité, il vient :

$$\beta(1-\alpha) = t \Leftrightarrow \beta\big(1 + t(1-t)\big) = t \Leftrightarrow \beta = \frac{t}{-t^2 + t + 1}$$

(on a facilement $-t^2 + t + 1 > 0$ sur l'intervalle $]0\,;1[$.)

Finalement :

$$\text{Pour } \alpha = -t(1-t) \text{ et } \beta = \frac{t}{-t^2+t+1} \text{, on a :}$$
$$\forall t \in \left]0\,;1\right[,\ y_{n+1} - \beta = \alpha\left(y_n - \beta\right)$$

2. D'après la question précédente, la suite $(y_n - \beta)$ est une suite géométrique de raison α.
   On a facilement : (y_n) converge $\Leftrightarrow (y_n - \beta)$ converge.
   Etudier la convergence de la suite $(y_n - \beta)$ revient à étudier la valeur de $\alpha = -t(1-t)$.
   Pour ce faire, étudions la fonction $t \mapsto -t(1-t)$ sur l'intervalle $\left]0\,;1\right[$.
   Elle y est dérivable en tant que fonction polynôme et sa dérivée est la fonction $t \mapsto 2t-1$ qui est strictement négative sur $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$, s'annule en $\frac{1}{2}$ et est strictement positive sur $\left]\frac{1}{2}\,;1\right[$. On en déduit que la fonction $t \mapsto -t(1-t)$ admet un minimum global en $\frac{1}{2}$.
   Pour $t = \frac{1}{2}$, on a : $-t(1-t) = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.
   Par ailleurs, on a facilement : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[-t(1-t)\right] = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left[-t(1-t)\right] = 0$.
   On déduit de ce qui précède que la fonction $t \mapsto -t(1-t)$ prend ses valeurs dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{4}\,;0\right[$. Finalement : $\alpha \in \left[-\frac{1}{4}\,;0\right[$.
   Ainsi, comme $|\alpha| < 1$, on en déduit que la suite $(y_n - \beta)$ est convergente et de limite nulle.
   On en déduit immédiatement que la suite (y_n) converge et que sa limite est égale à β.

$$\text{La suite } (y_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{t}{-t^2+t+1}.$$

3. On procède comme dans les questions précédentes :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= x_{2(n+1)} \\ &= (1-t)\,x_{2n+1} \\ &= (1-t)\,t\left[1-x_{2n}\right] \\ &= (1-t)\,t\,(1-z_n) \end{aligned}$$

   On a cette fois : $z_{n+1} = (1-t)t(1-z_n) = -(1-t)t\,z_n + (1-t)t$.
   D'où, en procédant encore par identification : $\alpha = -t(1-t)$ et $\beta = \dfrac{t(1-t)}{-t^2+t+1}$.

La valeur de α à celle obtenue à la question précédente, on en déduit cette fois que la suite $(z_n - \beta)$ converge vers 0. La suite (z_n) est donc convergente et sa limite vaut $\beta = \dfrac{t(1-t)}{-t^2+t+1}$.

La suite (z_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \dfrac{t(1-t)}{-t^2+t+1}$.

4. Raisonnons par l'absurde en supposant que la suite (x_n) converge et notons L sa limite. Dans ces conditions, les suites (y_n) et (z_n) sont également convergentes et admettent également L pour limite.
   On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \dfrac{t}{-t^2+t+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \dfrac{t(1-t)}{-t^2+t+1} = \mathrm{L}$.
   Mais l'équation $\dfrac{t}{-t^2+t+1} = \dfrac{t(1-t)}{-t^2+t+1}$ admet pour solution $t=0$ dans $\mathbb{R}$ et n'admet donc pas de solution dans l'intervalle $]0\,;1[$. On aboutit ainsi à une contradiction.

La suite (x_n) n'est pas convergente.